## Premessa

Il nostro Istituto, formato da una scuola dell'infanzia, quattro scuole primarie e due scuole secondarie di primo grado, nasce come "Comprensivo" nell'anno scolastico 1999/2000.
Da quel momento, la progettazione dell'offerta formativa, ha coinvolto congiuntamente i tre ordini di scuola; in seguito, la formazione di una "commissione orientamento e continuità", ha favorito ulteriormente il confronto fra gli insegnanti e la condivisione delle esperienze didattiche. Queste iniziative e la consapevolezza che il confronto sul piano metodologico didattico agevola gli alunni/e nel passaggio tra un ordine di scuola e un altro, hanno costituito una forte spinta a superare l'occasionalità per far diventare le esperienze di continuità e condivisione, una pratica didattica.
La proposta del CRED ha trovato pertanto un terreno già fertile e l'avvio del laboratorio di sperimentazione del curricolo verticale di matematica è apparso il proseguo naturale di un processo in atto, in più ha gettato le premesse per l'istituzione di un laboratorio stabile, che viene portato avanti da un gruppo aperto di insegnanti dei tre ordini di scuola, sia autonomamente che con la consulenza della prof.ssa R. Zan con la quale periodicamente viene fatto il punto della progettazione.

## Il laboratorio

In un primo momento il gruppo si è confrontato attraverso una sorta di brain storming sollecitato da domande quali:

- Cos'è per noi la matematica?
- È tecnica, ragionamento, linguaggio, o cos'altro?
- Che cosa vogliamo insegnare attraverso la matematica ?
- Quali abilità vogliamo che gli alunni sviluppino?
- Quali sono le difficoltà che incontriamo come insegnanti?

Si è ben presto delineato l'argomento su cui lavorare, quello verso il quale il corpo docente avverte maggiori difficoltà nell'individuare efficaci strategie didattiche per aiutare i ragazzi:
IL PROBLEMA
Ci si è quindi orientati verso un laboratorio di ricerca–azione sperimentando varie modalità di approccio e di interazione con il problema.
Abbiamo iniziato l'attività con il professor Brunetto Piochi, docente di Matematica all'Università di Firenze che ci ha proposto un approccio diverso al problema "stereotipo" privilegiando l'interazione con il testo piuttosto che la risoluzione.
Durante questa prima fase del laboratorio, nella quale abbiamo lavorato alla destrutturazione/ristrutturazione del testo, abbiamo verificato come i problemi standard dei libri di testo possano essere trasformati utilmente in stimoli di apprendimento per i nostri ragazzi e diventare occasione per attività che non riducano la loro risoluzione ad un mero esercizio.
Parallelamente abbiamo messo a punto un gioco aritmetico: "Numerando", che è stato occasione di problem solving.

La sperimentazione nelle classi delle attività programmate nel laboratorio ha fatto emergere con forza la necessità di conoscere e di riflettere sulle **cause** che stanno alla base delle difficoltà sia nostre che degli alunni.
In risposta a questa nostra specifica esigenza i il professor Piochi ci ha messo in contatto con la professoressa Zan del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, che da anni è impegnata in una attività di ricerca sulle difficoltà di apprendimento della matematica.
Con quest'ultima l'attenzione si è centrata sulle difficoltà dell'alunno, sulle sue emozioni e convinzioni, cioè sul modo in cui i bambini e le bambine "vedono" e "vivono" la matematica, nello specifico, l'attività di risoluzione dei problemi.

## L'articolazione

Con l'esperto gli insegnanti:

- progettavano, provandola in prima persona, l'attività da sperimentare nelle classi, differenziata per livelli di età,
- procedevano alla verifica di quella precedente, attraverso il confronto dei risultati e delle problematiche emerse in itinere
- apportavano e predisponevano i necessari aggiustamenti all'attività
- raccoglievano il materiale per la documentazione
- organizzavano attività di laboratorio nelle classi quinte da effettuarsi con insegnanti di matematica della scuola media

Senza l'esperto gli insegnanti

- si incontravano a piccoli gruppi
- predisponevano i materiali di lavoro
- informavano i colleghi sulle attività programmate
- confrontavano le loro esperienze

## Le riflessioni degli insegnanti

Questo laboratorio ha dato l'opportunità agli alunni di sperimentare, inventare, scoprire, pensare e confrontarsi provando curiosità, divertimento, soddisfazione, piacere ed anche gusto nel cimentarsi in situazioni di problem solving. Anche gli insegnanti hanno condiviso con loro le stesse opportunità ed emozioni, con in più il sollievo di riconoscersi in un comune sentire ed agire.
Uno degli interrogativi iniziali "La matematica non è amata?" è stato ampiamente smentito dagli atteggiamenti e dai risultati positivi riscontrati; certo è che l'amore per la matematica nella maggior parte dei casi non è immediato, ma ha bisogno di essere coltivato e crescere attraverso "cure" costanti e prolungate radicate nella consapevolezza che dedicare tempo non vuol dire perdere tempo, ma investire nel tempo.
Nel momento in cui l'interesse prioritario dell'insegnante non è più il programma da svolgere, ma la ricerca di una modalità efficace di lavoro con i propri allievi diventa naturale porsi mète condivise. Si scopre allora che la miglior "cura" è quella fondata sulle domande perché dalle risposte scaturiscono le informazioni più preziose per capire e comunicare e le domande più illuminanti sono quelle volte a conoscere pensieri, ragionamenti, convinzioni, emozioni che guidano il comportamento degli allievi quando fanno matematica.

**Verso un curricolo  verticale sul problema**

Obiettivi inseriti nel P.O.F. d'Istituto in riferimento al laboratorio di sperimentazione sul problema (Con la schematizzazione si perde la ricchezza del contesto, ma si comunica che esiste un progetto condiviso )

- ***Comprensione di una situazione problematica***
- ***Interazione con la situazione problematica***
- ***Individuazione di strategie risolutive***

**Scuola dell'infanzia**

Attraverso il gioco, la drammatizzazione, il disegno e la manipolazione:

- *Approccio al significato* di situazione problematica
- *Rappresentazione* di una situazione problematica
- *Esposizione* di possibili soluzioni

**Scuola primaria**

- *Riconoscimento* di una situazione problematica in diversi contesti sperimentali, linguistici, in situazioni varie, relative a campi di esperienza scolastici e non

- *Rappresentazione* di varie situazioni problematiche attraverso modi verbali, iconici, simbolici al fine di favorire la curiosità, l'intuizione e il gusto della scoperta

- *Individuazione* delle risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo, *selezionando* le informazioni ricavabili dal contesto, i dati forniti dal testo e gli strumenti utili per la risoluzione della situazione problematica

**Scuola secondaria di 1° grado**

- *Riconoscimento* del carattere problematico di una situazione, *individuando* l'obiettivo da raggiungere, sia nel caso di problemi proposti dall'insegnante, sia nel vivo di una situazione problematica in cui occorre *porsi con chiarezza* il problema da risolvere

- *Rappresentazione* in modi diversi di situazioni problematiche al fine di creare un ambiente di lavoro favorevole alla loro risoluzione

- *Individuazione* delle risorse necessarie per raggiungere l'obiettivo *scegliendo* opportunamente le azioni da compiere ( operazioni aritmetiche, costruzioni geometriche, grafici, equazioni,…) *concatenandole* in modo efficace al fine di *produrre* una risoluzione del problema

- *Confronto* fra vari procedimenti risolutivi e loro *valutazione* in riferimento alla economia di pensiero, alla semplicità del calcolo e alla possibilità di applicarli in altre situazioni.

## Esempi di attività sperimentate nelle classi

Il gruppo di ricerca-azione ha sperimentato nelle classi varie proposte didattiche delle quali riportiamo soltanto alcuni esempi, scelti tra i più significativi, con l'intento di comunicare attraverso il racconto degli insegnanti e le risposte degli alunni, la "strada" intrapresa.
Ciò che segue vuole essere pertanto un riferimento per insegnanti che credono nell'innovazione didattica e sono alla ricerca di conferme o risposte agli interrogativi con cui quotidianamente si confrontano.

| Tema | Attività | Livello scolare |
|---|---|---|
| Il problema reale | 1. Che cos'è per te un problema?<br>2. Scegliamo uno dei problemi e proviamo a risolverlo<br>3. Disegna un problema che hai avuto e come lo hai risolto<br>4. Lavoro su varie situazioni problematiche non di tipo matematico inventate e proposte dall'insegnante<br>5. Passaggio dai quantificatori al numero, attraverso giochi ed esperienze sul testo | Infanzia e prima classe scuola primaria |

**1. Che cos'è per te un problema?**
*Classe prima*

- È una difficoltà. Per esempio quando non sai come rimediare a qualcosa
- Io ho avuto un problema quando sono venuto a scuola senza l'astuccio
- Quando uno ha rubato qualcosa e deve andarlo a dire alla polizia
- Quando un compagno ti butta un lapis sopra un armadio e non ci arrivi.
- Quando alla mamma si ferma la macchina e te non puoi andare a scuola
- Non avere la casa è un problema
- Quando qualcuno muore
- Quando ti senti male, la mamma non sa cosa deve fare, a volte chiama il dottore, a volte no
- Quando una macchina non ha più benzina
- Quando finisci il quaderno e c'hai ancora da lavorare, hai un problema
- Quando non so fare qualcosa o sono rimasto indietro

**2. Scegliamo uno dei problemi e proviamo a risolverlo**

Decidiamo di risolvere il problema esposto da Jacopo:“ *Quando una macchina non ha più la benzina, perché non va più dove voleva andare”*. I bambini decidono che l’autista dell’auto è Paola. Sono emerse tre ipotesi di risoluzione:

**Prima ipotesi**

Paola cammina - Arriva al distributore - Compra la benzina e se la fa mettere in una bottiglia - Cammina fino alla macchina - Mette le benzina nel serbatoio - Parte
-

In questa ipotesi qualcuno osserva che se l’auto si è fermata lontana da un distributore Paola deve camminare troppo.

**Seconda ipotesi**

Paola telefona col cellulare a un amico - L’amico va al distributore a comprare la benzina - La porta a Paola che la mette nel serbatoio – Paola parte

Anche in questo caso qualcuno obietta che l’amico potrebbe essere lontano.

**Terza ipotesi**

Paola chiama il carro attrezzi - Questo porta l’auto di Paola al distributore - Paola fa benzina - Parte.

Questa ipotesi piace molto perché c’è il carro attrezzi.

| I bambini e le bambine osservano che un problema si può risolvere in modi diversi |
|---|

**3. Disegna un problema che hai avuto e come lo hai risolto**

*Classe prima*


UN MIO PROBLEMA
HO PERSO LA PENNA NERA E MAMMA NON LA COMPRA PIÙ
URSULA 12/1/04
COME LO RISOLVO
SONO STATA BRAVISSIMA A SCUOLA E COSÌ HO CONVINTO MAMMA A RICOMPRARMELA ANCHE PERCHE GLIELHO DETTO TANTE E TANTE VOLTE


VALENTINA 12/1/2004
UN MIO PROBLEMA
IO AFFOGAVO NEL MARE
COME LO RISOLVO
MAMMA MI A TIRATO SU CON LA MANO

4. **Lavoro su varie situazioni problematiche non di tipo matematico inventate e proposte dall'insegnante**

**Nel bosco dei Cento Acri**

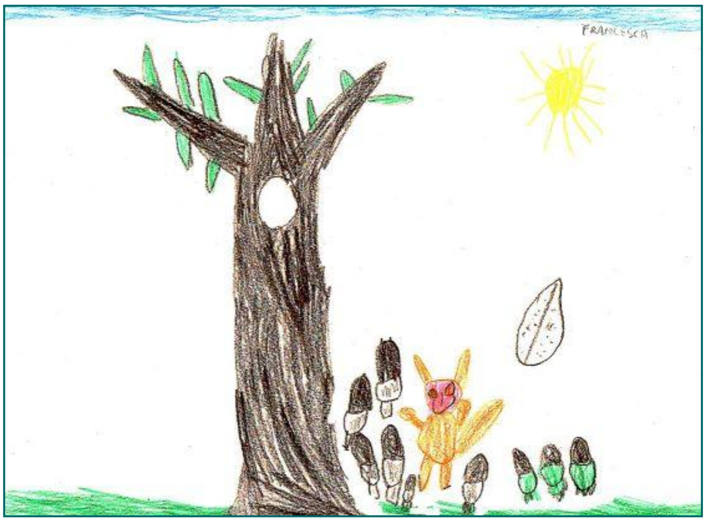
*Scuola infanzia*

<u>In mezzo</u> al bosco dei Cento Acri, <u>dentro</u> il buco di una grossa quercia, viveva Flic lo scoiattolino. L'inverno stava per arrivare e Flic sente freddo: è arrivato il momento di fare provviste.
Così Flic comincia a cercare del cibo e trova <u>tante ghiande</u>, le raccoglie e le porta nella sua tana. Poi fa un giretto, senza allontanarsi troppo e trova <u>poche nocciole</u> e una <u>grossa noce</u>.

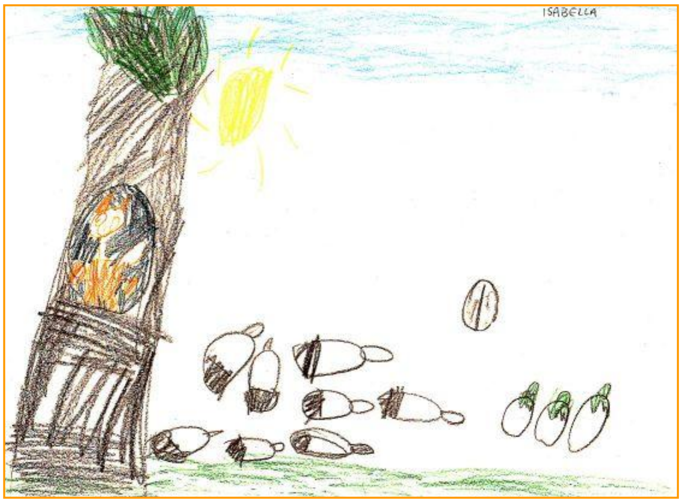
Ai bambini viene distribuito un foglio bianco e viene chiesto loro di eseguire le richieste di volta in volta formulate dall'insegnante

- Disegna dove vive Flic
- Disegna la sua tana
- Disegna le ghiande che trova Flic
- Disegna le nocciole che trova Flic
- Disegna la noce che trova Flic

**Lorenzo 4 anni**





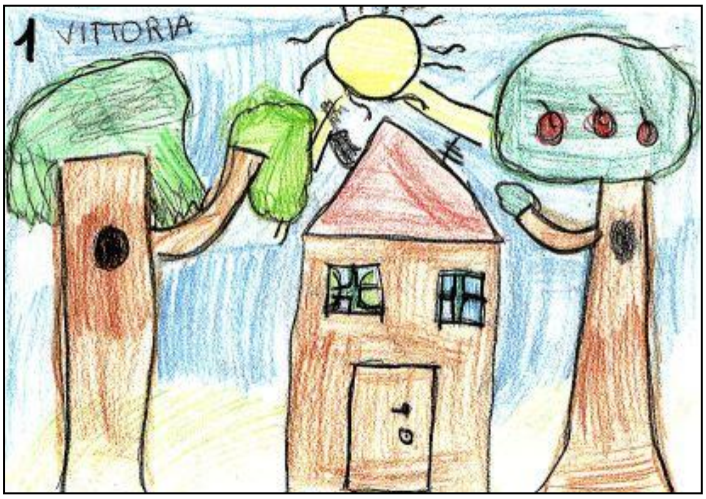


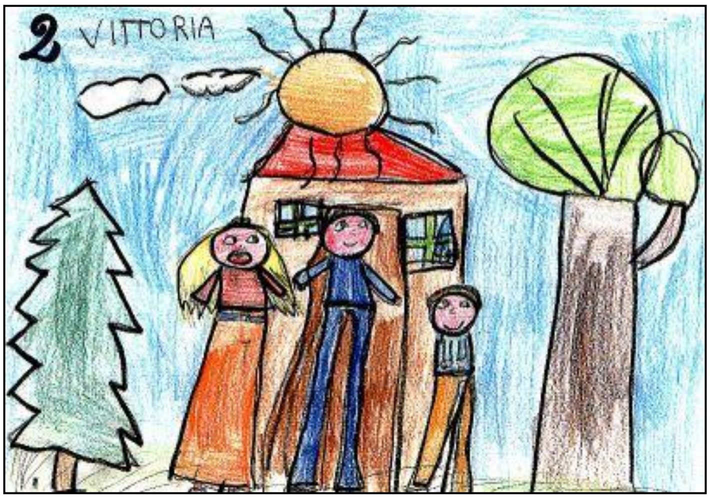
**La storia di Tobia**
(*Classe prima*)

In una vecchia casetta in mezzo al bosco, abita un bambino con la sua mamma e il suo babbo.
Il bambino si chiama Tobia e, poiché abita lontano da altri bambini, si è fatto degli amici speciali: un cane, due gatti e uno scoiattolo.
Con loro si diverte molto a giocare a chiappino sul prato vicino a casa.

Rispondi alle seguenti quattro domande con altrettanti disegni

1.Dove si trova la casa di Tobia?
2. Quali persone abitano nella vecchia casetta?
3. Quali sono gli amici di Tobia?
4. Dove giocano Tobia e i suoi amici





**Lo scoiattolo Fizzi**
(*Classe prima*)

L'insegnante racconta…

Ho proposto ai bambini di inventare collettivamente una storia nella quale ci fosse un succedersi di eventi.

La storia doveva avere per protagonisti gli animali del bosco che si preparano ad affrontare l'inverno, tema sul quale la collega di classe aveva lavorato pochi giorni prima

La tecnica del raccontare è stata quella della casualità per sorteggio: si sorteggia il nome di un alunno che inizia la storia, il secondo sorteggiato aggiunge una sequenza e così via.

Al termine leggiamo l'intera storia che i bambini trovano ovviamente molto bella ma anche un po' lunga.
***(Questa prima fase del lavoro diverte molto i bambini e richiede più di mezz'ora.)***

Propongo loro di prendermi l'incarico di "restringerla" per poterla disegnare in sequenze, come è già stato fatto con un'altra storia "numerica", attività che era piaciuta molto.

Alcuni giorni dopo consegno ai bambini la storia divisa in sequenze e sintetizzata cercando di rispettare gli aspetti più creativi e <u>mantenendo inalterati i quantificatori usati dagli alunni.</u>

***La fase di rappresentazione grafica delle varie sequenze, ha richiesto in momenti diversi circa 3 ore.***

C’era una volta uno scoiattolo che si chiamava Fizzi e viveva nel bosco con i suoi amici Fazzi, Fezzi, Fozzi e Fuzzi.
Fizzi e i suoi amici giocavano sempre a nascondino.

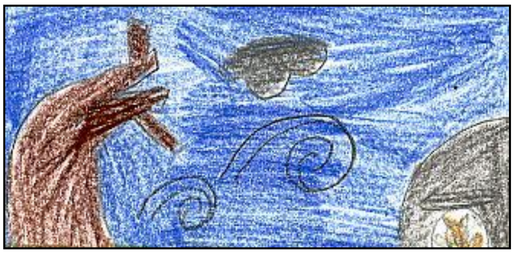
Un giorno li chiamò il loro amico uccellino e disse: ”Sta per arrivare l’inverno! Preparate le provviste!”

Fizzi e i suoi amici decisero di sparpagliarsi nel bosco in cerca di cibo.

Fizzi trovò **1** bella castagna e **alcune** noci e corse a portarle alla tana.

Fezzi si arrampica su un grande albero di noci e ne raccoglie **tante**.

Fozzi trova solo **1** castagna e **1** noce, ma continua a cercare perché sa che l’inverno è lungo!…

| | |
|---|---|
| Fuzzi sotto un alto castagno trova **molte** castagne ancora dentro il riccio, le apre e se le porta nella tana. |  |
| L'inverno arrivò, i venti spezzavano i rami e i **5** amici si rifugiarono nella loro tana ma erano tranquilli perché avevano fatto una bella scorta. |  |
| Passò l'inverno e arrivò la primavera, gli scoiattolini avevano voglia di uscire a giocare ma si sentivano ancora deboli. Allora ognuno di loro si mangiò **1** noce e **1** castagna che avevano raccolto durante l'autunno. Come erano buone! |  |

La storia di Fizzi ricorre spesso nelle conversazioni in classe ed ispira anche altre storie inventate con l'insegnante di lingua.
Terminato il lavoro delle sequenze, ho chiesto ai bambini:
"**Adesso che l'abbiamo disegnata, cosa ci si potrebbe fare ancora con questa storia?"**
Alcuni dicono che è una storia che parla anche di matematica perché ci sono numeri e parole che indicano quantità (***alcune, poche, tante***).

Propongo:
"Se ci parla di matematica possiamo rappresentare queste quantità, disegnamole!"

**1 castagna** ______________________________
**alcune noci** ______________________________
**tante noci** ______________________________i
**1 castagna e 1 noce**_____________________
**molte castagne** ______________________________
Domando:" Quali domande vi suggerisce la storia?"
Gli interrogativi sono tantissimi perciò suggerisco loro di concentrarci solo su alcune domande altrimenti poi "per rispondere dovremo lavorare tantissimo!"
Si concorda di scegliere solo le domande che riguardano le provviste che gli scoiattoli portano portato nella tana.

- Quante castagne?
- Quante noci?
- Quanti frutti?
- E' più grande il mucchio delle noci o quello delle castagne?

*"Adesso confrontiamo quello che avete trovato"*
Ne emerge che quasi a nessuno risulta la stessa quantità di frutti.
*"Perché?"*
Molti bambini dicono che le parole **molte, alcune, tante** possono essere disegnate in tanti modi.
*Cosa si potrebbe fare per trovarci tutti d'accordo?*

I bambini discutono su quanti frutti disegnare, ma c'è sempre qualcuno scontento.
Finalmente una bambina dice:
"Secondo me si dovrebbe levare le parole ***molte, tante alcune*** e metterci dei **numeri**".
L'accordo per questa soluzione "GENIALE" è totale.

Successivamente propongo di "restringere" ancora la storia lasciandoci solo quello che ci serve per rispondere alle domande che ci eravamo fatti, inserendo i numeri.
Si perviene alla fine al seguente testo:

LO SCOIATTOLO FIZZI

C’era una volta uno scoiattolo che si chiamava Fizzi e che abitava nel bosco con i suoi 4 amici Fezzi, Fazzi, Fozzi e Fuzzi.
Quando l’inverno era vicino i 5 amici si misero in cerca di provviste.
Fizzi trovò 1 bella castagna e 4 noci.
Fazzi trovò 3 noci.
Fozzi trovò solo 1 castagna e 1 noce.
Fezzi trovò 4 noci e 1 castagna.
Fuzzi trovò 5 castagne.
Gli scoiattoli portarono le loro provviste nella tana e aspettarono che passasse l’inverno per tornare a giocare insieme.

Quante sono tutte le castagne raccolte? ________

Disegnale e lo scoprirai facilmente.

- Quante sono tutte le noci raccolte? ________

Disegnale e lo scoprirai facilmente.

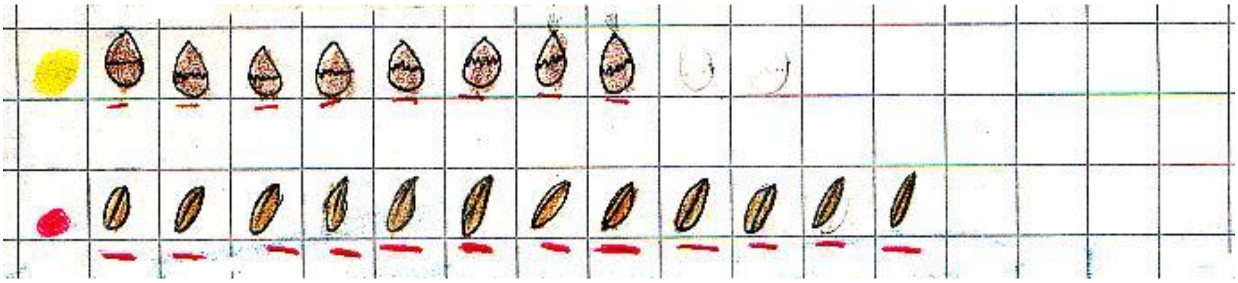
- Sono di più le castagne o le noci? ______________________

Quanti sono tutti i frutti raccolti? ______________

- Due scoiattolini hanno raccolto proprio le stesse cose; sapresti dire chi sono?

______________________ , ________________________

Per facilitare il conteggio e il confronto suggerisco di rappresentare i frutti su due righe identificate con due pallini di colore diverso.



| Tema | Attività | Livello scolare |
|---|---|---|
| Il problema matematico | 1. Dividere e condividere: quando un problema reale diventa un problema matematico<br><br>2. Un problema, tante domande | Classi seconda, terza, quinta primaria e classe prima scuola secondaria di primo grado |

**1. Dividere e condividere: quando un problema reale diventa un problema matematico**

**Spartizione di pinoli**

(*Classe seconda)*

Poco prima dell'uscita da scuola Chiara, Bianca, Silvia e Giada litigavano fra loro per stabilire la proprietà dei pinoli raccolti in giardino durante la ricreazione; la discussione aveva coinvolto altri compagni e si era fatta animata.
La maestra ha momentaneamente tolto a tutte i pinoli promettendo di riparlarne il giorno successivo in quanto tutti a gran voce affermavano che quello che era accaduto era un bel problema e che andava risolto. La classe nell'anno precedente aveva sperimentato l'attività "Che cos'è per te un problema" ed era pronta nel riconoscere varie situazioni problematiche e nel sottolinearle anche in modo divertente con una sorta di complicità con l'insegnant e.
Nel pomeriggio la maestra riferisce l'episodio nel laboratorio con la dott.ssa Zan chiedendole se era il caso di utilizzarlo come momento di approccio alla divisione; la professoressa suggerisce di non avere fretta e di riproporre inizialmente
la modalità già sperimentata " **Come** possiamo risolvere il nostro problema? "
Ecco le proposte formulate durante la discussione del giorno dopo:
Chiara: "O li levi a tutte o ne dai uno per uno"
Bianca:"In che senso? Semmai li devi dare uno per uno finchè non finiscono"
Silvia: "E se sono **dispari**? E ne avanza uno, solo uno? Allora lo tieni te?"
Michele: "Se ne avanza **uno si può dividere**"
Silvia: "Come?"
Michele: "Si può spezzare"
Silvia: "Ma non basta per tutte ,è troppo piccino un pinolo!"
Riccardo: "Si può dare a chi ne ha presi meno"
Bianca : "Nessuno ne ha presi di meno se io li do uno a lei, uno a lei, uno a lei e uno a me. Se li ho dati bene sono uguali e allora quello che avanza non lo puoi dare a nessuno."
Silvia :" E se ce n'è uno di meno?"
Giada: "Lo rilevi a tutte"
Michele: "Se manca si leva *il precedente*"
Silvia: "Se ne manca uno, a ricreazione qualcuno prenderà un pinolo in giardino e lo dà a chi manca"

A questo punto qualcuno propone di darli a tutti i bambini e le bambine della classe.

Giada:"Si potrebbero contare e se sono 15 come noi, si danno a tutti, se sono di meno, **ad esempio 8 si danno 2 a me, 2 a Chiara, 2 a Silvia, 2 a Bianca"**
Silvia:"*A vederli* sono di più!!"

I pinoli vengono contati e risultano 63.
Viene chiesto a una delle quattro bambine:
"**Quanti** ne devi prendere per essere sicura di darne intanto uno a ciascuno?"
La bambina ha preso 15 pinoli e ne ha dato uno per uno.
"Ne puoi distribuire ancora ?"
A turno, le altre tre bambine hanno distribuito i pinoli, fino a che ne sono rimasti 3 e si è deciso di regalarli alla maestra.

Senza dubbio il coinvolgimento emotivo del litigio e la posta in gioco hanno rappresentato un forte stimolo a ricercare strategie eque di spartizione per soddisfare il bisogno "di non fare ingiustizie". L'esperienza ha dimostrato che , pur non conoscendo l'operazione aritmetica della divisione, i bambini sono già in grado di utilizzarla e che in una situazione in cui sono protagonisti e, come afferma la Prof.ssa Zan, non sentono di dover dimostrare abilità e conoscenze, esprimono con naturalezza considerazioni matematiche usando un linguaggio specifico che spesso non emerge in altri contesti.

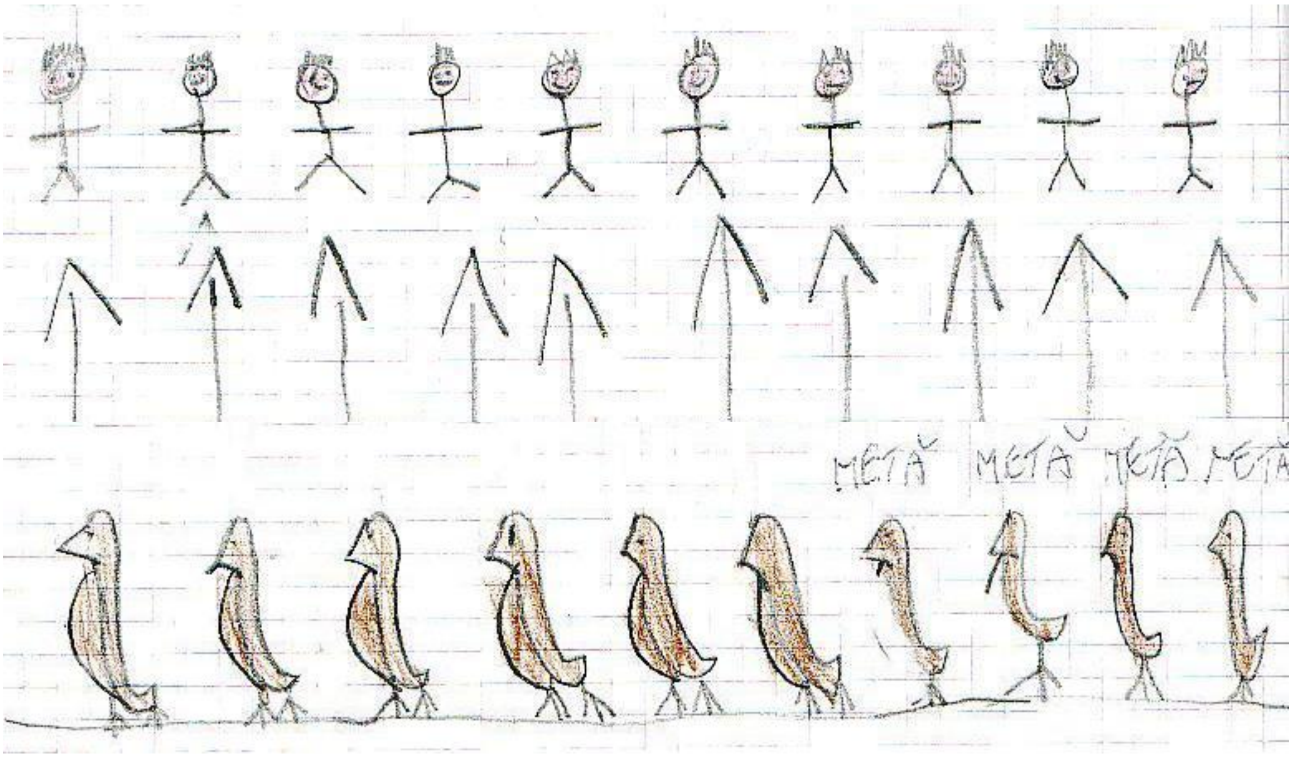
A conferma di quanto sia stimolante e didatticamente proficua la particolare circostanza, reale o immaginaria, in cui si deve **decidere** come dividere "un bene", vale la pena prendere visione del lavoro seguente attuato in una classe terza della scuola primaria.

## Spartizione di galline
(*Classe terza*)

Il problema di cui riportiamo di seguito la documentazione è nato all'interno di un'attività, definita dalle/dai bambine/i "Lavoro problematico", che si è sviluppata in più fasi: invenzione di problemi, classificazione secondo l'argomento, analisi dei testi e correzione, nuova formulazione dei testi, costruzione di uno schedario. La prima fase ha visto ogni alunno/a impegnato/a nell'invenzione di un problema con i numeri e di un problema senza numeri, sono stati così prodotti circa 50 problemi, che sono stati letti insieme e raggruppati secondo la seguente classificazione: matematici, scientifici, relazionali, religiosi. Successivamente i problemi matematici sono stati analizzati, secondo criteri concordati dalla classe, da piccoli gruppi, che avevano anche il compito di riscrivere il testo corretto, ma che hanno anche cercato di trovare la soluzione. Alcuni problemi si sono rivelati di difficile risoluzione, ma quello delle galline ha appassionato tutti, quindi ogni bambina/o ha scritto la sua risoluzione e poi le abbiamo lette e raggruppate, le soluzioni trovate erano quattro, alcune davvero geniali, a dimostrazione che dietro una soluzione c'è sempre una logica, anche quando per noi adulti è difficile coglierla.

CI SONO 10 UOMINI, CHE SONO ANDATI A FARE UN LUNGO VIAGGIO NEL DESERTO E HANNO FINITO LE PROVVISTE RAGGIUNGONO UN'OASI, DOVE TROVANO ACQUA E 8 GALLINE MORTE, PRONTE DA CUCINARE. QUANDO LE GALLINE SONO COTTE, COME FANNO A DIVIDERLE?

Soluzione n.1




1. Ho dato 1 gallina per uno ai 6 uomini 6 : 6 = 1

Quante galline restano da dividere ? 8 – 6 = 2

2. Ho diviso le galline a metà e ho dato metà gallina a 4 uomini.

Quanti uomini mangiano una gallina intera e quanti ne mangiano metà ?

Risposta

6 uomini mangiano una gallina intera e 4 ne mangiano metà.

Osservazioni :

i 4 uomini che hanno mangiato solo metà gallina vorranno vendicarsi ?

i 4 uomini che mangiano metà gallina avevano meno fame degli altri.

Soluzione n. 2

SOLUZIONE DI BIANCA, MARCO, MATTEO,

FRANCESCA, GAIA, ELENA

1- DIVIDO OGNI GALLINA IN 10 PEZZI

QUANTI PEZZI DI GALLINA IN TUTTO?

10X8=80 PEZZI

2 DISTRIBUISCO UN NUMERO UGUALE DI PEZZI

AD OGNI UOMO

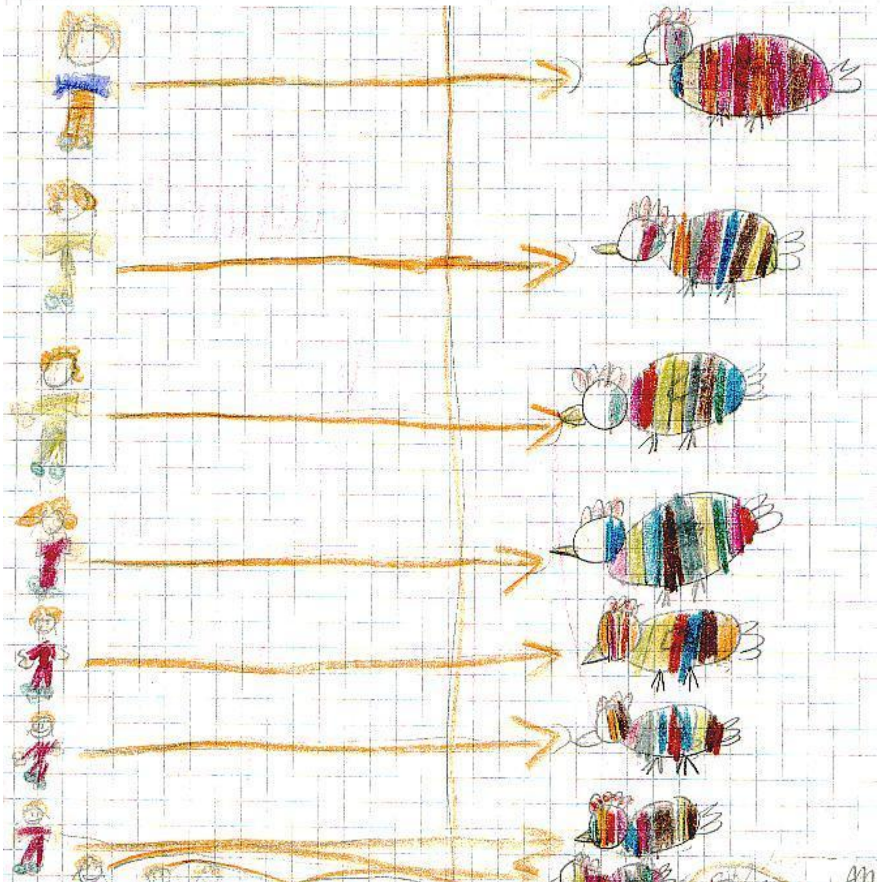
QUANTI PEZZI DI GALLINA AVRÀ OGNI

UOMO 80 : 10 = 8 PEZZI

OGNI UOMO AVRÀ LA DECIMA PARTE

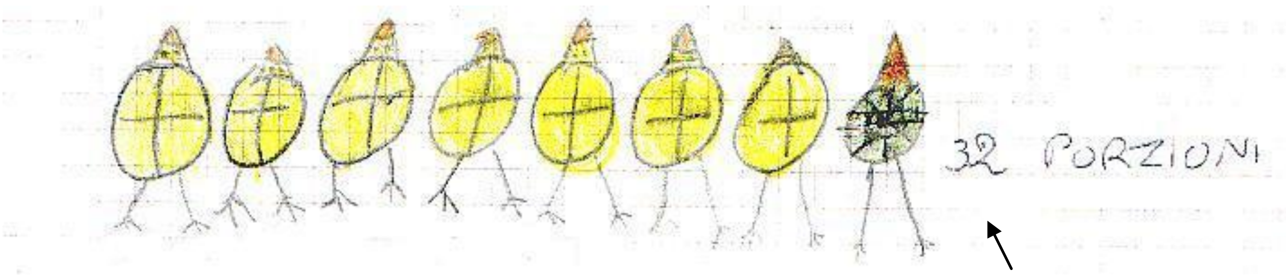
DI OGNUNA DELLE 8 GALLINE, IN TUTTO

8 PEZZI



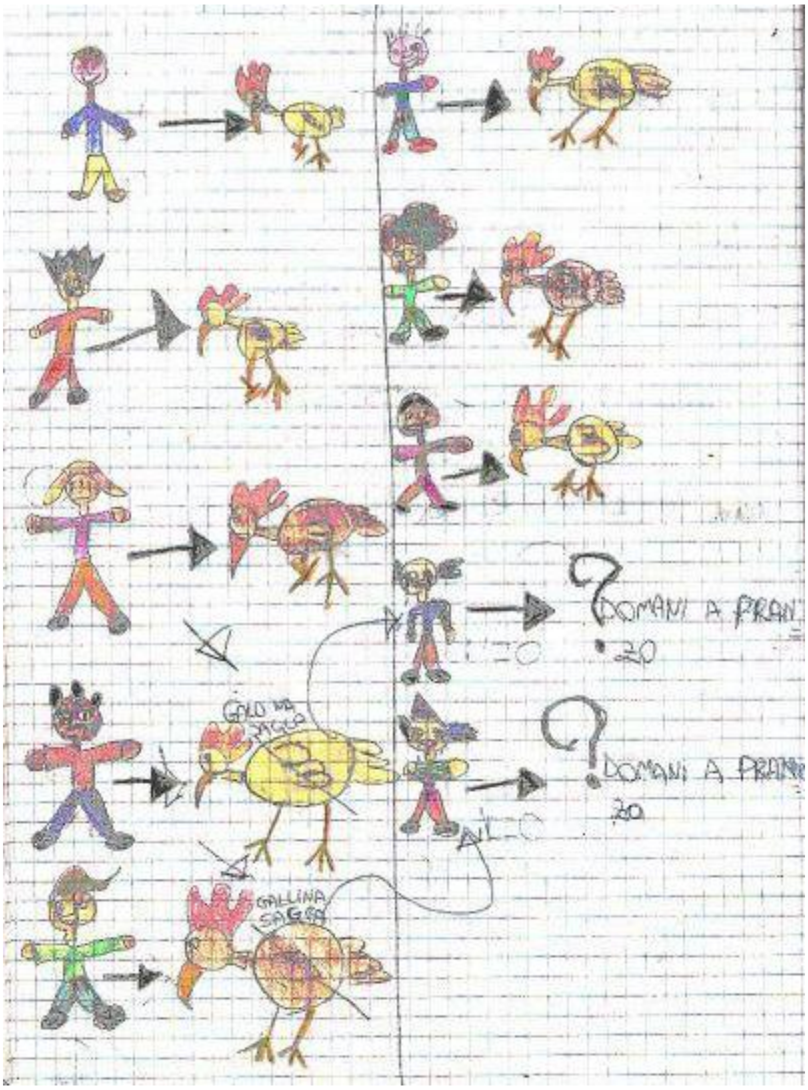
Soluzione n. 3

1.Divido ogni gallina in 4 porzioni
Quante porzioni in tutto ? 8 x 4 = 32
2. Distribuisco le porzioni in modo uguale
Quante porzioni avrà ogni uomo ? 32 :10 = 3 resto 2
Le 2 porzioni che restano saranno divise tra i 10 uomini.
Risposta
Ogni uomo avrà 3 porzioni, ogni porzione corrisponde alla quarta parte di una gallina, poi avrà anche un pezzettino.




Soluzione n. 4

6 galline sono normali e 2 sono sacre, perchè sono grandi il doppio,
Ho dato un gallina normale per uno a 6 uomini e ho diviso le galline sacre a metà e le ho date agli altri 4 uomini.
6 : 6 =1 2 : 4= 0,5
Risposta
6 uomini mangiano una gallina normale intera e 4 mangiano la metà di una gallina sacra.




L’esperienza, riportata nel laboratorio, ha suscitato nei docenti interesse, divertimento, meraviglia, ma soprattutto ammirazione per come i bambini avevano recepito l’essenza del problema e l’avevano risolto. Senza dubbio la fame dei protagonisti caratterizzava il contesto come una situazione problematica e rendeva condivisibile e sensato l’obiettivo;
la situazione contingente inoltre richiedeva di prendere una decisione veloce e sensata. Le strategie risolutive descritte ci hanno rivelato risorse inaspettate che ci sono apparse come una ricchezza da non perdere e possibilmente da incrementare; ci siamo interrogati sul fatto che probabilmente tutti i bambini di quell’età la posseggono e costatandone l’assenza in momenti scolastici successivi, abbiamo ipotizzato che noi insegnanti siamo riusciti a disperderla in nome di una matematica artefatta, falsamente rigorosa, ma anche falsamente realistica. A nessuno di noi sarebbero venute in mente galline sacre o divisioni commisurate a fabbisogni individuali, ma nessuno ha trovato “sbagliate” le soluzioni prodotte, tutti invece hanno trovato in esse motivazioni per approfondire il discorso, spostando ad es. l’attenzione sull’economicità della soluzione o sulla sua equità, a conferma che le esperienze significative aprono sempre nuovi ambiti di discussione e richiedono tempo. Il comportamento di questi alunni ci è apparso quindi “esemplare”, in linea con le considerazioni che andavamo facendo con la prof.ssa Zan e con la decisione

che avevamo preso di proporre e far scaturire dalle classi questioni allo stesso modo pregnanti e di non facile soluzione.

**2. Un problema, tante domande**

Questa attività fa parte del percorso linguistico e metacognitivo sul problema verbale proposto dal Prof. Piochi ed è inclusa nella fase “Relazione dati-domande”. Costituisce un approccio diverso al problema standard presente in tutti i testi scolastici sia del 2° biennio della scuola primaria che della prima classe della scuola secondaria e mira a verificare la comprensione da parte degli alunni della relazione fra situazione, dati espressi e domande.
E’ stato assegnato alla classe il seguente testo ed è stato chiesto agli alunni di formulare tutte le domande che venivano loro a mente.

**5 ragazzi decidono di organizzare una festa. Comprano 16 lattine di bibite a mezzo euro l’una, 5 scatole di biscotti a un euro e mezzo l’una e 12 focacce a 60 centesimi di euro l’una.**

Ecco un elenco rappresentativo delle domande prodotte dagli alunni suddivise in due gruppi: quello delle domande classiche che abbiamo definito “attese” e quello delle domande che sono apparse strane, per contro definite “inattese”; la loro analisi ha offerto agli insegnanti diversi spunti di discussione sia con il prof. Piochi che con la prof.ssa Zan.

| Domande “attese” | Domande “inattese” |
|---|---|
| •Quanto spendono in tutto ?<br><br>• Se vogliono dividere la spesa, quanti soldi deve mettere ciascun ragazzo?<br><br>• Quanto costano tutte le lattine?<br><br>• Quanto costano tutte le focacce ? | •Quanti sono gli invitati?<br><br>• Perché solo 5 ragazzi ?<br><br>• Se sono così pochi perché decidono di comprare così tanta roba da bere ?<br><br>• Perché hanno deciso di spendere 22,70 € ?<br><br>• Come mai costano 60 centesimi le focacce ? |

Ne sono scaturite le seguenti riflessioni:

Le domande attese sono tutte orientate verso risposte di tipo quantitativo: Quanto spendono…? Quanto costano…? Quanti soldi….?
E’ possibile individuare tra esse una gerarchia e arrivare alla seguente conclusione così espressa da una bambina del quinto anno della scuola primaria:
“Ho capito che c’è una domanda *regina* che contiene tutti i dati e include le altre domande”

Le domande inattese rispondono ad esigenze diverse, ma altrettanto legittime e orientate a conoscere il contesto festa del quale la spesa è un aspetto secondario.
Come mai…? Perché ? introducono problemi diversi da quelli di norma attesi dall' insegnante e svelano pensieri che corrono su binari diversi.
Le tipologie dei due gruppi di domande, esemplificando due diverse modalità di pensiero: logico-matematico nel primo caso, narrativo nel secondo, hanno permesso agli insegnanti di guardare agli alunni "illogici" con occhi diversi. Probabilmente si tratta di alunni in cui il pensiero narrativo prevale su quello logico; il loro comportamento diviene adesso comprensibile e ci si può confrontare su entrambi i piani.
Questa semplice attività che a prima vista poteva sembrare di scarsa utilità ha invece fornito agli insegnanti ulteriori strumenti per migliorare la comunicazione didattica , ha confermato la necessità dell'indagine metacognitiva e ha ribadito l'importanza di chiedere agli alunni stessi non solo di pensare e agire, ma anche di comunicare le loro modalità di pensiero e azione.

| Tema | Attività | Livello scolare |
|---|---|---|
| L'insieme dei numeri naturali, le operazioni e il calcolo mentale | Il gioco NUMERANDO<br><br>1. Le regole del gioco<br>2. Il comportamento dei numeri pari e dei numeri dispari<br>3. Questioni di divisibilità (ruolo dell'1 e dello 0)<br>4. Le espressioni<br>5. Operazioni a confronto | Classi 4^ e 5^ della classe scuola primaria e classe 1^ della scuola secondaria |

**"Numerando":** un percorso "*accidentato*" tra numeri, operazioni e strumenti di calcolo

### Il gioco

Numerando è un gioco ispirato ad una versione televisiva del celebre "Scarabeo"; è stato proposto dal Prof. Brunetto Piochi dell'Università di Firenze che ha coordinato la prima fase del laboratorio, è stato messo a punto da un gruppo di 13 insegnanti di vari ordini scolastici e infine sperimentato nelle classi di 4^ e 5^ della scuola primaria e nella classe prima della secondaria dell'Istituto "G. Gamerra" stesso.
Questo gioco è stato visto inizialmente come un mezzo per costruire apprendimento significativo, un buon rapporto con la matematica, ma anche un modo per veicolare, scoperte e riflessioni collegate a concetti e competenze relative al *numero*. Nel tempo è divenuto qualcosa di più, il filo rosso di un viaggio di formazione, un percorso *accidentato*, pieno d'insidie, ostacoli, imprevisti, tra numeri, operazioni e strumenti di calcolo.

### Come si gioca

*Numerando* può essere proposto a partire dalla terza classe della scuola primaria e deve essere eseguito alternativamente a mano e con la calcolatrice da alunni raggruppati secondo un criterio di eterogeneità, meglio se in gruppi di tre, ma il numero di componenti può variare a seconda del contesto classe. (Successivamente, quando tutti hanno preso familiarità con il gioco, i gruppi misti possono essere alternati con gruppi omogenei per livello di competenze).
L'insegnante prepara una serie di cartellini contenenti le cifre da 0 a 9 e i segni delle 4 operazioni (nella scuola secondaria possono essere aggiunte l'elevazione a potenza e l'estrazione di radice).
Viene estratto un numero-bersaglio di 3 cifre, estraendo per tre volte un cartellino-cifra e rimettendo ogni volta nel mazzo il cartellino estratto; poi si estrarranno, ancora casualmente, ma questa volta senza rimettere il cartellino nel mazzo, tre cifre e due operazioni (possono in seguito diventare tre).
Le cifre possono essere associate per comporre numeri e utilizzate più volte come anche le operazioni.
La divisione deve essere esatta e pertanto si opera solo con numeri naturali.

Scopo del gioco è quello di arrivare nel tempo stabilito di 5-10 minuti più vicino possibile al numero bersaglio.

Tutti i gruppi lavorano alternativamente con e senza la calcolatrice (in ogni gruppo devono esserci almeno due calcolatrici) e alla fine viene assegnato un punteggio secondo le seguenti regole:

- Per ogni sequenza corretta (il calcolo deve essere corretto) 1 punto
- Per ogni sequenza sbagliata –1 ( 0 nella scuola elementare)
- Per il mancato svolgimento –2
- La risposta più vicina al numero-bersaglio, in mancanza del centro, vale 3 punti
- Al gruppo che centra il bersaglio vengono assegnati 5 punti
- Viene assegnato un bonus di 2 punti a chi usa tutte le cifre estratte e tutti i simboli di operazione
- Viene assegnato un bonus di 2 punti a chi individua la *strada più breve*
- Il punteggio massimo che può essere conseguito è di 10 punti.

Nella scuola media gli alunni possono costruire espressioni, mentre nella elementare si eseguiranno le operazioni una di seguito all'altra utilizzando il risultato di ognuna come un *mattoncino* per costruire l'operazione successiva.

Devono essere utilizzati solo numeri naturali e pertanto l'operazione di divisione deve risultare esatta.

Al termine di ogni partita un alunno di ogni gruppo (meglio se è quello meno pronto nel calcolo) detta il conto che il gruppo ha fatto facendo attenzione a riferirlo correttamente perché conta ciò che viene dettato e non vengono accettate correzioni.

Conviene preparare una tabella da consegnare a ogni gruppo per registrare calcoli e punteggi in modo da coinvolgere tutta la classe e allo stesso tempo costituire una memoria dell'attività svolta. E' bene dedicare al gioco un'ora alla settimana per un paio di mesi, effettuando ogni volta 4 manche: due con la calcolatrice e due senza. Le modalità di assegnazione del punteggio possono subire aggiustamenti con la sperimentazione del gioco nelle classi (quelle descritte non sono quelle stabilite all'inizio dell'attività, ma sono state cambiate dietro proposta degli alunni); anche il tempo di durata delle manche può variare in base l'età degli allievi e può essere ridotto man mano che il gioco diventa più familiare.

Se si verificano situazioni che fanno perdere attrattiva al gioco, ad esempio vince sempre lo stesso gruppo o emergono difficoltà relazionali, i gruppi possono essere cambiati.

Un esempio può chiarire il gioco:

Numero bersaglio: **543** Simboli di operazione: **-** e **x** Cifre: **2, 6, 9**

**Sequenza operativa che centra il bersaglio**

6 x 2 = 12
12 x 6 = 72
72 x 9 = 648
648 – 96 = 552
552 – 9 = 543

**Racconti di lezioni scaturite dal *Numerando* in una prima classe della scuola secondaria**

***INDAGINE SUL COMPORTAMENTO DEI NUMERI PARI E DEI DISPARI***

La classe sta cercando la soluzione al seguente "Numerando"

BERSAGLIO: **582**
CIFRE: **9, 1, 3**
OPERAZIONI: **- x**

e un alunno commenta sottovoce: *" Questo è difficile, non può tornare, le cifre sono tutte dispari e il bersaglio è pari".*
Tutti i gruppi centrano il bersaglio ed è quindi evidente che un' affermazione del genere è falsa. Qualcuno, però, obietta che se, tra le operazioni, ci fosse stata la divisione, sarebbe stata vera. Diventa, quindi, necessaria un'indagine approfondita sul comportamento dei numeri pari e dispari nelle operazioni aritmetiche.
Forse tale comportamento era già conosciuto nel caso delle due operazioni dirette ( + e x ), perché è stato facile arrivare alle seguenti tabelle, ma è stato più difficile ragionare sulle operazioni inverse.

| **+** | **P** | **D** |
|---|---|---|
| **P** | **P** | **D** |
| **D** | **D** | **P** |

| **X** | **P** | **D** |
|---|---|---|
| **P** | **P** | **P** |
| **D** | **P** | **D** |

Si nota che, se si fa una sottrazione tra due numeri dispari, si ottiene un numero pari ( 913-319 = 594 931 – 333 = 598 ) e che la tabella dell'addizione può valere anche per la sottrazione, nei casi in cui è eseguibile in N. L'analisi della seguente sequenza, che si ottiene togliendo in successione numeri dispari (ma si osserva la medesima situazione anche aggiungendoli) aiuta i ragazzi a capire:
931 – 333 = 598
598 – 9 = 589
589 – 3 = 586
586 – 3 = 583
583 – 1 = 582

"Ottenere un risultato P o D" dipende dal numero di volte che si toglie il numero dispari:

- se sottraggo da P un numero pari di volte un numero dispari ottengo un numero P
- se sottraggo da P un numero dispari di volte un numero dispari ottengo un numero D

E con la divisione che cosa accade?
Interviene un altro alunno: *" Con le cifre pari non si può arrivare a un bersaglio dispari"* e poiché lui ha più credibilità del primo, sono tutti propensi a sottoscrivere la sua affermazione. Ma basta chiedere di dare qualche esempio, per accorgersi che le cose non vanno proprio così:

“La divisione tra due numeri uguali, pari o dispari che siano dà sempre 1” (nessuno fa riferimento a 0 **:** 0)
6 : 2 = 3
36 : 4 = 9
36 : 6 = 6
L’operazione P : P , purché il dividendo sia multiplo del divisore, può dare P o D a seconda dei casi!
P : D = $x$ con $x \cdot$D = P, quindi $x$, se esiste, è pari; mentre non esiste alcun numero che, moltiplicato per un pari dia, come risultato, un dispari.

### *LE SORPRESE DELLA DIVISIONE (COMPORTAMENTO DELL’1 E DELLO 0)*

Il gioco del *Numerando* ha contribuito a far conoscere meglio la divisione, in particolare alcune divisioni “*particolari”*, che si sono rivelate provvidenziali in alcuni casi difficili in cui sembrava, a prima vista, impossibile centrare il bersaglio oppure prendere il bonus dato dall’utilizzo di tutte le cifre e tutte le operazioni.
Ecco alcune esemplificazioni:

**Bersaglio 227**
**Cifre 2 – 7 – 6**
**Operazioni + :**

Ecco una delle tante possibili soluzioni: 7 : 7 = 1 1 + 226 = 227

Lo stesso numerando proposto nella classe quarta della scuola primaria è stato centrato da 2 gruppi di alunni su 5 senza utilizzare la divisione. Anche nella scuola secondaria non è stato immediato l’uso della divisione tra termini uguali per ottenere 1 ( una cosa è saper eseguire le divisioni ed un’altra è utilizzarle!). Tale divisione è stata utilizzata da una minoranza di alunni, ma, presto, da tutti gli allievi è stata individuata come una grande risorsa nella soluzione di casi difficili come ad esempio nel caso in cui le cifre sono tutte pari e il bersaglio è dispari.
*“Chi l’avrebbe detto che l’1 fosse così importante?”* .
Qualcuno scopre che il numero 1 può rappresentare un “trucco” per totalizzare più punti come ad esempio nel seguente caso:

**Bersaglio 450**
**Cifre 1 – 5 – 6**
**Operazioni - :**

561 – 111 = 450
450 : 1 = 450

A questo punto è stata indagata anche la possibilità dell’1 come dividendo che però si è rivelata di scarsa utilità nel nostro gioco perché ad esclusione del caso particolare 1 : 1, la divisione non genera numeri naturali.

*“E con lo zero cosa accade?”*

**Bersaglio 324**
**Cifre 0 – 5 – 9**

**Operazioni - :**

Qualcuno, nonostante avesse a disposizione la calcolatrice, ha scritto
324 : 0 = 324
E' evidente che la calcolatrice non è stata usata e invito i ragazzi a farlo; la risposta di **errore** lascia tutti stupiti, qualcuno prova con il telefono cellulare e arriva un messaggio molto più esplicito:

***"La divisione per 0 non è consentita"***

Tutti chiedono di poter provare con il proprio cellulare: il cellulare lascerà senz'altro un segno maggiore della classica spiegazione!

### *DAL NUMERANDO ALLE ESPRESSIONI*

Quasi tutti gli alunni sanno risolvere espressioni ( già sapevano farlo nella scuola primaria) ma non le conoscono ancora abbastanza, soprattutto non ne conoscono il linguaggio. Hanno imparato le regole di precedenza, ma non sono ancora consapevoli del ruolo chiave delle parentesi e delle proprietà delle operazioni; hanno comunque già sperimentato che *"risolvere un'espressione è più facile che scriverla!"*
E' quindi molto importante che riflettano sulla costruzione delle espressioni affinché esse diventino uno strumento utile per comunicare in modo sintetico un procedimento di calcolo.
Anche il *Numerando* ha contribuito a farle conoscere meglio: ecco come alcuni procedimenti di calcolo eseguiti dagli alunni hanno assolto a tale scopo.

La lezione è impostata sulla richiesta di trasformare in espressioni alcune sequenze di calcolo scelte tra quelle prodotte nel corso del gioco.

**Bersaglio 272**
**Cifre 2 – 4 – 9**
**Operazioni + x**

Soluzione di un alunno: 94 x 2 = 188 188 + 42 = 230 230 + 42 = 272

La trasformazione di tale sequenza in espressione è stata immediata:
**94 x 2 + 42 + 42 = 272**

Chiedo, quindi, alla classe: **"E' possibile scrivere l'espressione in modo diverso?"** (Questa non è una richiesta sconosciuta alla classe perché si è già cimentata in esercizi di trasformazione di addizioni in moltiplicazioni e di moltiplicazioni in potenze)

Arriva puntuale la risposta attesa: **94 x 2 + 42 x 2 = 272**

Domando: **"E' possibile fare un' ulteriore trasformazione inserendo le parentesi tonde?"**

Questa volta, vedo smarrimento e incredulità (non è stata ancora scoperta la proprietà distributiva, e questa è una buona occasione per arrivarci) ma c'è sempre chi raccoglie la sfida e Gabriele propone **(94 + 42) x 4,**

Mattia corregge **(94 + 42) x 2**
e subito c'è un coro di conferma derivato dall'aver verificato che **136 x 2 = 272**

C'è la certezza di aver fatto la trasformazione richiesta perché la parentesi tonda "scorcia l'espressione" e c'è un clima di soddisfazione per aver apportato migliorie successive alla situazione di partenza; ogni passaggio ha un senso e fa andare avanti
Provo ora a vedere se gli alunni hanno capito e se sanno procedere da soli.
La proprietà distributiva verrà ripresa successivamente.

**Bersaglio** **100**
**Cifre** **2 – 4 – 5**
**Operazioni** **-** e **x**

Come trasformare le seguenti espressioni?

**24 x 5 – 4 – 4 – 4 – 4 - 4 = 100** **25 x 5 – 5 – 5 – 5 – 5 – 5 = 100**

**Questa volta è stato meno difficile arrivare, nel primo caso, a (24 – 4 ) x 5 e, nel secondo, a (25 – 5) x 5**
Occorre, comunque, ripercorrere più volte la stessa strada prima che diventi familiare ai ragazzi ed è necessario che essi siano in grado di riconoscere la proprietà distributiva in altri contesti e sappiano utilizzarla.

***OPERAZIONI A CONFRONTO***

**Bersaglio 381**
**Cifre 6, 1, 4**
**Operazioni x :**

I pensieri dell'insegnante: "Peggio non poteva capitarci, già la questione divisibilità riduce notevolmente le possibilità di movimento, e come se non bastasse ci si mettono anche moltiplicazione e divisione a ingessare il gioco, il bersaglio poi è irraggiungibile ( la fattorizzazione mentale di 381 sfornava 3 x 127) sarà che venga fuori qualcosa d'interessante!". Tali considerazioni facevano prevedere proteste o commenti analoghi da parte degli alunni, ma essi non hanno evidenziato nessuna preoccupazione e hanno affrontato il compito con un impegno inaspettato, senza mostrare né segni di stanchezza né di rinuncia; hanno chiesto solo più tempo e dopo aver provato a lungo e appurato che tutti incontrassero le stesse difficoltà, si sono arresi alla seguente soluzione, che è stata poi la stessa per tutti i gruppi:
64 x 6= 384
384 : 1= 384
La richiesta successiva è venuta naturale: "Ora che conoscete meglio le operazioni aritmetiche e avete imparato a ricavare informazioni su un numero dalla sua fattorizzazione, provate a spiegare perché risulta difficile centrare questo *Numerando*
La fattorizzazione è stata immediata così come il riferimento alle cifre disponibili, ma non c'è stato nessun accenno alla natura e al rapporto tra le due operazioni. Qualcuno ha pero' intuito una modalità investigativa interessante ed ha in sostanza formulato la seguente proposta operativa:

**“Se provassimo a lasciare invariati bersaglio e cifre e cambiassimo la combinazione delle operazioni? Sarebbe ugualmente difficile centrare il bersaglio? “** La risposta negativa era largamente condivisa, ma era necessario verificarla anche perché nessuno aveva saputo sul momento argomentarla. E così procedendo per gradi, siamo andati a produrre e ad esaminare le seguenti soluzioni:

**+ -** 661 – 441 +161 = 381
**+ x** 61 x 6 +14 +1 = 381
**+ :** 1164 : 4 + 64 +16 + 6 + 4 = 381
**- x** 66 x 6 –14 –1 = 381
**- :** 461 – 66 –14 : 1 = 381

Ne sono scaturite le seguenti osservazioni.
La divisione abbinata all’addizione o alla sottrazione non crea problemi perché posso combinare le cifre tenendo presenti i criteri di divisibilità e procedere poi per aggiunte o sottrazioni successive; potendo poi riutilizzare più volte una stessa cifra ho praticamente a disposizione tutte le cifre necessarie a comporre il numero bersaglio.
Con la divisione e la moltiplicazione insieme, il bersaglio per essere centrato deve essere multiplo dei numeri che è possibile scrivere con le cifre estratte e viceversa le cifre devono essere divisori del numero bersaglio per cui se ciò non si verifica ci si deve accontentare di andarci vicino.
Questo non succede con le altre due operazioni inverse, addizione e sottrazione perché non si procede per salti obbligati dalla divisibilità, inoltre la presenza dell’1 rappresenta una garanzia in più per arrivare al bersaglio perché aggiungendolo o togliendolo vengono generati nuovi numeri, cosa che non succede con la moltiplicazione e la divisione in quanto l’uno si comporta da elemento neutro

Queste poche riflessioni che non sono state immediate, ma frutto di due ore di lavoro , una di gruppo e una individuale, hanno smentito le scarse aspettative dell’insegnante e sono state alla fine molto appaganti perché la classe ha mostrato con naturalezza un atteggiamento investigativo che era totalmente assente all’inizio dell’anno. Probabilmente grazie anche a questo gioco, l’attività di problem solving si è inserita nel patrimonio genetico della classe e ne motiva e scandisce il comportamento cognitivo.

**Valutazione dell’esperienza**
Indubbiamente la sperimentazione del *Numerando* ha rappresentato un momento di innovazione didattica costituendo un valore aggiunto all’impostazione laboratoriale delle lezioni. Ha senz’altro contribuito a rendere gli alunni consapevoli di far parte di una comunità di ricerca che costruisce con il contributo di tutti i propri strumenti d’indagine e li sperimenta, procedendo a piccoli passi e per avanzamenti successivi, avvicinandosi sempre più al *cuore* del problema.
All’inizio era molto difficile ottenere osservazioni che si distaccassero dalla semplice registrazione dei fatti : “Il gruppo x non ha centrato il bersaglio”, “Non sono state utilizzate entrambe le operazioni”, “La sequenza di x è più corta di quella di y” erano frasi ricorrenti, e solo raramente compariva qualche commento interessante del tipo “Con le cifre pari, non si può arrivare a un bersaglio dispari” o qualche soluzione divergente che imponevano urgenti chiarimenti o portavano in superficie proprietà evidenti per l’insegnante, ma

nascoste per i ragazzi. Il fatto che proprio dal loro contributo iniziasse il lavoro di riflessione ha connotato la matematica di sentimenti positivi e ha indirizzato verso atteggiamenti sempre meno superficiali. Una volta è capitato che un ragazzino poco stimato è stato l'unico a centrare il bersaglio e ancora oggi ne riceve i benefici, un'altra volta la divisione tra termini uguali ha permesso di aggiungere l'1 che mancava ed è diventata subito una pratica di successo.
Mentre all'inizio l'operazione di divisione veniva accolta come una calamità in seguito è stata gestita senza imprecare contro la sorte e quando ci si è impadroniti del metodo della fattorizzazione è stato abbastanza naturale ragionare sulla divisibilità e anche la calcolatrice è stata usata di meno. In questa prima fase di sperimentazione non sono apparse differenze significative tra le manche con calcolatrice e quelle senza, ma non sono state esplorate le sue potenzialità come strumento didattico e ciò costituisce per questa esperienza una lacuna da colmare.